2 EQUATIONS MAITRESSES

→ On avait $[R_\alpha, R_\beta]^i = C^\gamma_{\alpha\beta}(\phi) R^i_\gamma + M^{ij}_{\alpha\beta} \frac{\delta S_0}{\delta \phi^j}$

2.1 Algebre différentielle graduée - (Co)homologie

DEF Une algebre différentielle graduée est un espace vectoriel muni d'un produit associatif et gradué-commutatif :

→ $a.b = (-1)^{\epsilon_a \epsilon_b} b.a$ avec $\epsilon(da) = \epsilon_a + 1$

→ antiderivation d : $d(a.b) = (da).b + (-1)^{\epsilon_a} a(db)$

→ differentielle si $d^2 = 0$

→ ex : forme exterieures. $\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_p}$

avec

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\epsilon_\omega} \omega \wedge (d\eta)$$

et $d\omega = 1/p! \, \partial_\mu \omega_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} dx^\mu \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_p}$ donc $d^2 = 0$

DEF Le noyau de d est $\mathrm{Ker}\, d \equiv \{a \mid da = 0\}$ (ici, a est fermée)

image est $\mathrm{Im}\, d \equiv \{a \mid a = db\}$ (ici, a est exacte)

→ On a $\mathrm{Im}\, d \subset \mathrm{Ker}\, d$, on peut donc considerer $\mathrm{Ker}\, d / \mathrm{Im}\, d$.

→ On peut écrire $A = \oplus A_n$ avec $n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{Z}$, et d est homogène du degré 1.

→ On veut construire une differentielle s ($s^2 = 0$) telle que sa cohomologie en degré 0 $H^0(s) = \{\text{observables}\}$.

DEF On appelle s la différentielle Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST).

2.2 Champs fantomes et antichamps

→ On définit les nombres quantiques suivants :

		Parité ϵ	# fantome pur	# antichamp	# fantome total (gh − a-f)
ϕ^A	ϕ^i	0	0	0	0
	C^κ	1	1	0	1
	C^Γ	0	2	0	2
ϕ^*_A	ϕ^*_i	1	0	1	−1
	C^*_κ	0	0	2	−2
	C^*_Γ	1	0	3	−3

→ Chaque champ à son antichamp $(q \leftrightarrow p)$

DEF L'anticrochet $(\,,\,)$ est défini par

$$(F,G) = \frac{\delta^R F}{\delta\phi^A}\frac{\delta^L G}{\delta\phi^*_A} - \frac{\delta^R F}{\delta\phi^*_A}\frac{\delta^L G}{\delta\phi^A}$$

→ On a $\delta F = \delta\phi^A \dfrac{\delta^L F}{\delta\phi^A} = \dfrac{\delta^R F}{\delta\phi^A}.\delta\phi^A$, donc $\dfrac{\delta^R F}{\delta z^M} = (-1)^{\epsilon_M(\epsilon_F+\epsilon_M)}\dfrac{\delta^L F}{\delta z^M}$

→ $\epsilon((F,G)) = F + G + 1$

$gh((F,G)) = gh\,F + gh\,G + 1$

$(F,G) = -(-1)^{(\epsilon_F+1)(\epsilon_G+1)}(G,F)$

$(FG,H) = F(G,H) + (-1)^{\epsilon_G(\epsilon_H+1)}(F,H)G$ Leibniz gradué

$(F,GH) = (F,G)H + (-1)^{\epsilon_G(\epsilon_F+1)}G(F,H)$

$(-1)^{(\epsilon_F+1)(\epsilon_H+1)}(F,(G,H)) + \text{cyclic} = 0$ Jacobi gradué

→ En général, $(B,B) \neq 0$, et $(B,(B,B)) = 0$

PROP Soit S une fonction paire $(\epsilon_S = 0)$. Alors $(S,F) \equiv \Delta F$ est une antidérivation.

En effet, $\Delta(FG) = (S,FG) = (S,F)G + (-1)^{\epsilon_F}F(S,G)$
$= \Delta F.G + (-1)^{\epsilon_F}F\,\Delta G$

De plus, si $(S,S) = 0$, alors $\Delta^2 = 0$

$\Delta^2 F = (S,(S,F)) \sim (F,(S,S)) = 0$

2.3 Équation maîtresse classique

DEF La différentielle BRST s est telle que $sF = (S,F)$ où S est solution de l'équation maîtresse $(S,S)=0$, telle que $S = S_0 + S_1 + S_2 + \dots$ avec $\begin{cases} gh(S_n) = 0 \\ anti(S_n) = n \end{cases}$

et $S_1 = \phi_i^* R^i_\alpha C^\alpha$ info sur les transfos de jauge et $\varepsilon^\alpha \mapsto C^\alpha$

$S_2 = C_\alpha^* Z^\alpha_\Gamma C^\Gamma + \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_j^* N_\Gamma^{ij} C^\Gamma$ + terme quadratique en les C^α

→ On a $gh(sF) = gh F + 1$

$\epsilon(sF) = \epsilon_F + 1$

⊙ Existence de S :

DEF Le différentielle de Koszul-Tate δ_{KT} est définie par

$\delta_{KT} \phi^i = 0 \qquad \delta_{KT} C^\alpha = 0 \qquad \delta_{KT} C^\Gamma = 0$

$\delta_{KT} \phi_i^* = \dfrac{\delta S_0}{\delta \phi^i} \qquad \delta_{KT} C_\alpha^* = \phi_i^* R^i_\alpha \qquad \delta_{KT} C_\Gamma^* = C_\alpha^* Z_\Gamma^\alpha + \frac{1}{2} \phi_i^* \phi^j N_\Gamma^{ij}$

⤳ δ_{KT} enlève un nombre d'antichamp

PROP $\delta_{KT}^2 = 0$

$\delta_{KT}^2 C_\alpha^* = \dfrac{\delta S_0}{\delta \phi^i} R^i_\alpha = 0$ (Noether)

$\delta_{KT}^2 C_\Gamma^* = \phi_i^* R^i_\alpha Z^\alpha_\Gamma + \dfrac{\delta S_0}{\delta \phi^i} \phi_j^* N_\Gamma^{ij} = 0$ (Réductibilité)

→ L'homologie est donnée par : $\left(H_n(\delta_{KT}) \equiv Ker(\delta_{KT})_n / Im(\delta_{KT})_n \right)$

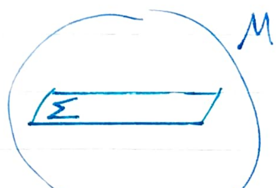
$H_n(\delta_{KT}) = 0 \quad n > 0 \quad \left(\delta_{KT} a_n = 0 \Rightarrow a_n = \delta_{KT} b_{n+1} \right)$

$H_0(\delta_{KT}) = \{$ Fonction sur la surface stationnaire $\}$ tensorisé par les fantômes

DEF La surface stationnaire est le sous espace des configurations des champs ϕ^i qui obéissent aux équations du mouvement :

" $C^\infty(\Sigma) = C^\infty(M) / \mathcal{N}$ "

Ker δ_{KT} ↙ ↘ Im δ_{KT}



→ 2 extensions qui coïncident sur Σ sont dans la même classe de cohomologie.

→ Rappel : on étudie une théorie de jauge caractérisée par une fonctionnelle $S_0[\phi^i]$ et des invariances de jauge $\delta_\varepsilon \phi^i = R^i{}_\alpha \varepsilon^\alpha$, qui se traduisent par les identités de Noether $\frac{\delta S_0}{\delta \phi^i} R^i{}_\alpha = 0$

On suppose que les $R^i{}_\alpha$ forment un ensemble complet de transfo. de jauge, qui peut être redondant : $Z^\alpha_\Gamma R^i{}_\alpha = N^{[ij]}_\Gamma \frac{\delta S_0}{\delta \phi^j}$

On veut introduire une différentielle en introduisant les antichamps ϕ^*_i et les champs fantômes C^α ($\leftrightarrow \varepsilon^\alpha$), et fantômes de fantômes : C^Γ ($\leftrightarrow Z^\alpha_\Gamma$).

→ On cherche une solution de l'équation maîtresse sous la forme d'un développement en # antichamp : $S = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots$ avec $\mathrm{antich}(S_n) = n$ et tq $gh(S_n) = 0$

⇒ les fantômes compensent les antichamps.

→ Pour S_1, il faut que $S_1 \propto \phi^*_i$ donc $S_1 \propto C^\alpha$ pour avoir $\mathrm{antich}(S_1) = 1$ et $gh(S_1) = 0$. La seule possibilité est $S_1 = \phi^*_i R^i{}_\alpha C^\alpha$

→ Pour S_2, on peut avoir $S_2 \propto \phi^*_i \phi^*_j$ et $S_2 \propto C^*_\alpha$. On construit

$$S_2 = (C^*_\alpha Z^\alpha_\Gamma + \tfrac{1}{2}\phi^*_i \phi^*_j N^{ij}_\Gamma) C^\Gamma + (\text{quadratic en les } C^\alpha)$$

$\rightarrow \epsilon(S) = 0$

→ On impose que $(S, S) = 0$. Si on a une telle fonction, on peut définir une différentielle $sF \equiv (S, F)$ avec $s^2 = 0$

→ On avait $\mathrm{antichamp}(\delta_{KT}) = -1$. On parle alors d'homologie.

On avait également $C^\infty(\Sigma) = C^\infty(\mathcal{M}) / \mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ est l'idéal des fonctions nulles sur Σ

→ On considère $C^\infty(\Sigma) \otimes \mathbb{P}_\mathbb{C}(C^\alpha, C^\Gamma)$, les polynômes à coeff complexes en les C^α, C^Γ, tensorisé par $C^\infty(\Sigma)$, càd les polynômes en les C^α, C^Γ à coeff. donnés par les fonctions sur Σ

Prop | L'homologie de δ_{KT} est donnée par

$H_0(\delta_{KT}) = C^\infty(\Sigma) \otimes \mathbb{P}_\mathbb{C}(C^\alpha, C^\Gamma)$ et $H_k(\delta_{KT}) = 0 \quad k > 0$

→ Pour commencer, calculons S_2. Pour cela, on calcule :

$$(S_0+S_1, S_0+S_1) = (S_0, S_0) + 2\,(S_1, S_0) + (S_1, S_1)$$

Or, $(S_0, S_0) = 0$

$$(S_1, S_0) = \frac{\delta^R S_1}{\delta\phi^A} \cdot \cancel{\frac{\delta^L S_0}{\delta\phi^*_A}}^{\,0} - \frac{\delta^R S_1}{\delta\phi^*_A}\,\frac{\delta^L S_0}{\delta\phi^A} = R^i_\alpha C^\alpha \frac{\delta S_0}{\delta\phi^i} \overset{\swarrow \text{Noether}}{=} 0$$

$$(S_1, S_1) = (\phi^*_i R^i_\alpha C^\alpha, \phi^*_j R^j_\beta C^\beta)$$

$$= \phi^*_i \frac{\delta R^i_\alpha}{\delta\phi^j} C^\alpha . R^j_\beta C^\beta - R^i_\alpha C^\alpha \phi^*_j \frac{\delta R^j_\beta}{\delta\phi^i} C^\beta$$

$$= \phi^*_i \left(R^j_\beta \frac{\delta R^i_\alpha}{\delta\phi^j} - R^j_\alpha \frac{\delta R^i_\beta}{\delta\phi^j} \right) C^\alpha C^\beta$$

$\delta_{KT}\,\phi^*_j = \delta S_0/\delta\phi_j$

$$= \phi^*_i \left(- C^\gamma_{\alpha\beta} R^i_\gamma - M^{ij}_{\alpha\beta} \frac{\delta S_0}{\delta\phi^j} \right) C^\alpha C^\beta$$

Or, $\delta_{KT}\, C^*_\alpha = \phi^*_i R^i_\alpha$

$$= \delta \left[\underbrace{- C^\gamma_{\alpha\beta}\, C^*_\gamma C^\alpha C^\beta - \tfrac{1}{2} M^{ij}_{\alpha\beta}\, \phi^*_i \phi^*_j C^\alpha C^\beta} \right]$$

→ Ensuite, $(S_0+S_1+S_2, S_0+S_1+S_2)$

$$= \underbrace{(S_1, S_1)}_{\#\text{ antichamp}=1} + 2(S_0+S_1, S_2) + \underbrace{(S_2, S_2)}_{\#\text{ antichamp} \geq 1}$$

Or, $(S_0+S_1, S_2)|_{\text{antich}=1} = \delta S_2$. Ainsi, on identifie avec $2S_2$

On ajoute également

$$S_2 = \frac{1}{2} C^\gamma_{\alpha\beta} C^*_\gamma C^\alpha C^\beta + \frac{1}{4} M^{ij}_{\alpha\beta}\, \phi^*_i \phi^*_j C^\alpha C^\beta + \underbrace{\delta(C^*_\Gamma C^\Gamma)}_{\text{condition limite}}$$

⊙ Construction par recurrence :

→ On suppose $S_0, \dots, S_{n-1}$ tels que $\overset{(n-1)}{R} \equiv S_0 + \dots + S_{n-1}$ est telle que

$$(\overset{(n-1)}{R}, \overset{(n-1)}{R}) = \underbrace{\overset{(n-1)}{D}}_{\text{antichamps } n-1} + (\text{terme antich} > n-1)$$

↳ Il existe S_n tels que $(\overset{(n-1)}{R} + S_n, \overset{(n-1)}{R} + S_n)$ commence en antichamp $\geq n$.

PROP | Soit A avec un $\#$ antich $= k_a$. Alors

$$(\overset{(n-1)}{R}, A) = \underbrace{\delta_{KT} A}_{k_a - 1} + (\text{ordre} + \text{élevé})$$

→ Ecrivons $(\overset{(n-1)}{R} + S_n , \overset{(n-1)}{R} + S_n) = \underbrace{\overset{(n-1)}{D} + 2\,\delta_{KT} S_n}_{\#\text{ antich} = n-1} + \dots$

Il faut résoudre $\delta_{KT} S_n = -\frac{1}{2}\overset{(n-1)}{D}$. Pour que S_n existe, il faut que
$$\delta_{KT}\overset{(n-1)}{D} = 0$$

Or, Jacobi : $(\overset{(n-1)}{R}, \underbrace{(\overset{(n-1)}{R}, \overset{(n-1)}{R})}_{\overset{(n-1)}{D}+\dots}) = 0$

$$\Rightarrow 0 = (\overset{(n-1)}{R}, \overset{(n-1)}{D} + \dots) = \delta_{KT}\overset{(n-1)}{D} + \dots \Rightarrow \delta_{KT}\overset{(n-1)}{D} = 0$$

→ On peut ainsi écrire une série formelle pour S telle que $sS = 0$
Pour toute les theories connue, la série s'arrête.

⊙ Ambiguité :

→ A chaque étape, S_n est définis par $\delta S_n = \frac{1}{2}\overset{(n-1)}{D}$. On pourrait donc avoir $S_n \mapsto S_n + \delta_{KT} K_{n+1}$, càd $\overset{(n-1)}{R} \mapsto \overset{(n-1)}{R} + \underbrace{(\overset{(n-1)}{R}, K_n)}_{\delta K_n + \dots}$

L'ambiguité peut être vue comme un anticrochet, càd une transfo canonique infinitésimale.

↳ 2 solutions de l'équation maitresse classique diffèrent par une transformation canonique.

→ Exemple. Supposons une transfo canonique avec $K_1 = \phi^*_i t^i$:
$$(S_0 + S_1 , \phi^*_i t^i) = \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i} t^i + \dots$$

Ceci correspond à une redéfinition des champs $\phi^i \mapsto \phi^i + t^i$

→ Exemple : $K_2 = \frac{1}{2}\phi^*_i \phi^*_j t^{ij}_\alpha C^\alpha + C^*_\beta \mu^\beta{}_\alpha C^\alpha$
et $\delta_{KT} K_2 = \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i}\phi^*_j t^{ij}_\alpha C^\alpha + \phi^*_i R^i{}_\beta \mu^\beta{}_\alpha C^\alpha$
$$= \phi^*_i \Big(R^i{}_\beta \mu^\beta{}_\alpha + \underbrace{t^{ji}_\alpha \frac{\delta S_0}{\delta \phi^j}}_{\text{trivial}} \Big) C^\alpha$$

⊙ Observables et cohomologie de s :

PROP La cohomologie de s en nombre de fantome 0 est les observables :

$$H^0(s) = \{\text{observables}\}$$

→ On développe la différentielle s : s augmente le #gh. tot de 1. On peut supprimer un antich (δ), ou supprimer des antich et des fantomes.

$$s = \underbrace{\delta_{KT}}_{s_{-1}} + \underbrace{\gamma}_{s_0} + s_1 + s_2 + \dots$$

Alors $s\phi^i = (\delta_{KT} + \gamma + \dots)\phi^i = 0 + R^i_\alpha C^\alpha + \dots \Rightarrow \gamma\phi^i = R^i_\alpha C^\alpha$

$$s\phi^*_i = \delta_{KT}\phi^*_i + \gamma\phi^*_i + \dots = \frac{\delta S_0}{\delta\phi^i} + \dots$$

$$sC^\alpha = 0 + \underbrace{Z^\alpha_\Gamma C^\Gamma + \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma} C^\beta C^\gamma}_{\gamma C^\alpha} + \dots$$

→ Or, $s^2 = 0 = (\delta_{KT} + \gamma + s_1 + s_2 + \dots)^2 = \delta_{KT}^2 + \underbrace{(\delta\gamma + \gamma\delta)}_{=0} + \underbrace{(\gamma^2 + \delta s_1 + s_1\delta)}_{=0}$

On trouve : $\begin{cases} \delta\gamma + \gamma\delta = 0 \\ -(\delta s_1 + s_1\delta) = \gamma^2 \end{cases}$

↳ Alors γ définit une antidérivation dans la cohomologie de δ_{KT} :

soit a tq $\delta_{KT}\, a = 0$, alors $\delta_{KT}(\gamma a) = 0$

En effet, $\delta(\gamma a) = -\gamma\,\delta a = 0$

↳ Si $a = \delta b$, alors $\gamma a = \delta(\dots)$

En effet, $\gamma a = \gamma\,\delta b = -\,\delta(\gamma b)$

Alors γ est bien définit dans $H_0(\delta_{KT})$. De plus, $\gamma^2 = 0$ dans $H_0(\delta)$

En effet, $\gamma^2 a = (-\delta s_1 - \overset{\to 0}{\cancel{s_1\delta}})\, a = \delta(-s_1 a) \simeq 0$

On a donc une cohomologie de γ dans $H_0(\delta)$: $H(\gamma, H_0(\delta))$.

PROP $H^0(s) \simeq H^0(\gamma, H_0(\delta))$

→ En l'absence d'invariance de jauge, une observable est une fonction de l'espace des phases. Or, tout point de l'espace des phases comme les données initiales d'une solution classique. Or, $\gamma F = 0 \Leftrightarrow F$ est inv. de jauge $\delta F/\delta\phi^i \cdot R^i_\alpha = 0$, et $H_0(\delta) \Leftrightarrow$ fonctions sur la surface stationnaire. Ainsi, $H^0(s) = \{\text{observables}\}$

⊙ Conclusion :

→ On a montré comment construire la solution S de l'éq. maîtresse classique $(S,S)=0$, où $S = S_0 + S_1 + S_2 + \dots$ avec $gh\, S_n = 0$
où $S_0 = S_0[\phi^i]$ l'action classique, antichamp $S_n = n$

$$S_1 = \phi_i^* R^i_\alpha C^\alpha$$

$$S_2 = C^*_\alpha Z^\alpha_\Gamma C^\Gamma + \frac{1}{2} \phi^*_i \phi^*_j N^{ij}_\Gamma C^\Gamma + (\text{terme quadratique en } C^\alpha)$$

→ On a vu qu'on pouvait construire S par récurrence (perturbation homologique). On utilise l'acyclicité de la différentielle de Koszul-Tate pour les degré d'antichamps non négatif :

$$H^k(\delta_{KT}) = 0 \qquad k > 0$$

L'ambiguité dans S correspond à un transfo canonique dans l'anticrochet.

→ On a montré que $H^0(s) \simeq \{\text{observables}\}$

2.4 Yang-Mills et secteur non minimal

→ L'action de YM classique est donnée par $-\frac{1}{4}\int d^n x \, F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}{}_a = S_0[A^a_\mu]$

On a $S_1 = \phi^*_i R^i{}_\alpha C^\alpha \longrightarrow \int d^n x \, A^{*\mu}_a D_\mu C^a = S_1[A^*, C^a]$

On a $S_2 = \cancel{(\ldots)}^{0} + \text{terme quad en } C^\alpha \longrightarrow \frac{1}{2}\int d^n x \, C^*_a f^a{}_{bc} C^b C^c$

On peut montrer que $(S_2, S_2) = 0$ → Jacobi sur les constantes de structures

DEF Il est utile d'introduire les antifantomes $\overline{C}^a$ et les champs auxiliaires de Nakanishi-Lautrup b^a tels que

$$s\,\overline{C}^a = b^a \qquad \text{et} \qquad s b^a = 0$$

Afin de preserver un structure canonique, on introduit également leurs antichamps conjugués $\overline{C}^*_a$ et b^*_a, avec

$$s\,\overline{C}^*_a = 0 \qquad \text{et} \qquad s b^*_a = \overline{C}^*_a$$

→ On a $gh(\overline{C}^a) = -1$ et $\epsilon(\overline{C}^a) = -1$ (anticommutent)

$gh(b^a) = 0$ et $\epsilon(b^a) = 0$

Ainsi, $gh(\overline{C}^*_a) = 0 \qquad \epsilon(\overline{C}^*_a) = 0$

$gh(b^*_a) = -1 \qquad \epsilon(b^*_a) = 1$

→ L'ajout de ces variables non minimales $\{\overline{C}^a, b^a, \overline{C}^*_a, b^*_a\}$ n'affecte pas la cohomologie.

En effet, considerons l'operateur t agissant comme

$t\, b^a = \overline{C}^a \; ; \quad t\, b^*_a = 0 \; ; \quad t\, \overline{C}^a = a \; ; \quad t\,\overline{C}^*_a = b^*_a$

Alors on peut définir $N \equiv st + ts$ qui agit comme

$N b^a = b^a \; ; \quad N b^*_a = b^*_a \; ; \quad N\overline{C}^a = \overline{C}^a \; ; \quad N\overline{C}^*_a = \overline{C}^*_a$

Pour un polynome de degré k en les variable non minimales, on a

$$N P_k = k P_k \Leftrightarrow P_k = N\left(\frac{1}{k} P_k\right) \text{ pour } k > 0$$

$$= (ts + st)\left(\frac{1}{k} P_k\right)$$

Ainsi, si $sP_k = 0$, alors $P_k = s(\ldots)$ tout objet fermé est exact (homologie contractante) ⇒ pas de cohomologie en degré $k > 0$.

→ Pour générer les transformations BRST précédentes, on ajoute un terme non-minimal à l'action :

$S^{\text{non-min}} \equiv -i \int d^n x \; \bar{C}^*_a b^a$ (facteur i ≡ redéfinition des champs)

On a alors :

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + S^{n.m}$$
$$= -\frac{1}{4}\int d^n F_{\mu\nu}{}^a F^{\mu\nu a} + \int d^n_x A^{*\mu}_a D_\mu C^a + \frac{1}{2} C^*_a f^a{}_{bc} C^b C^c - i \bar{C}^*_a b^a$$

⊙ Commentaire

→ La solution de l'éq. maîtresse contient des termes locaux (intégrales d'espace-temps d'objets qui sont des fonctions locales : dépendent des champs, ... et de leur dérivées jusqu'à un ordre fini).

Théorème général : si S_0 et $R^i{}_\alpha$ locaux, alors solution locale.

2.5 Amplitudes de transition & valeurs moyennes

DEF On introduit l'opérateur suivant :

$$\Delta = (-1)^{\epsilon_A} \frac{\delta^L}{\delta \phi^A} \frac{\delta^L}{\delta \phi^*_A} \quad \text{où} \quad \phi^A \equiv \{\phi^i, C^\alpha, C^\Gamma, \dots, \bar{C}^\alpha, b^\alpha, \dots\}$$
$$\phi^*_A = \{\phi^*_i, C^*_\alpha, C^*_\Gamma, \dots, \bar{C}^*_\alpha, b^*_\alpha, \dots\}$$

→ Δ est un opérateur singulier : si on agit avec Δ sur une fonctionnelle locale on va obtenir des $\delta(0)$ → il faut le régulariser.

→ Pour YM, on a $\Delta S \sim f^a{}_{bc} = 0$

→ On a $gh\,\Delta = 1$ et $\epsilon(\Delta) = 1$ et $\Delta^2 = 0$, mais Δ n'est pas une anti-dérivation.

⊙ Cas où $\Delta S = 0$:

DEF On introduit l'action fixée de jauge S_ψ

$$S_\psi = S\left[\phi^A, \phi^*_A = \frac{\delta \psi}{\delta \phi^A}\right] \text{ pour une certaine } \psi[\phi] \text{ avec } \begin{cases} \epsilon(\psi) = 1 \\ gh\,\psi = -1 \end{cases}$$

On appelle ψ le fermion de fixation de jauge

On se débarrasse des antichamps et de l'invariance de jauge.

THM On regarde l'intégrale fonctionnelle obtenue à p d S_ψ,

$$Z_\psi \equiv \int \mathcal{D}\phi \, \exp \tfrac{i}{\hbar} S_\psi$$

Alors Z_ψ ne dépend pas de ψ.

→ Rappel. On considère $\int f(x,\theta)\, dx\, d\theta$ avec $\epsilon(x) = 0$ et $\epsilon(\theta) = 1$

On a $\int g(\theta)\, d\theta_1 \cdots d\theta_n = g_{n\, n-1 \dots 1}$ avec $g(\theta) = g_0 + \dots + g_{n\, n-1 \dots 1}\, \theta^n \theta^{n-1} \cdots \theta^1$

↳ $\displaystyle\int \frac{\partial g}{\partial \theta_k}\, d\theta = 0$ invariance par translation

↳ $\displaystyle\int f(x,\theta)\, dx\, d\theta = \int f(x(x',\theta'), \theta(x',\theta'))\ \mathrm{sdet}\left\{\frac{\partial^R (x,\theta)}{\partial (x',\theta')}\right\} dx'\, d\theta'$

→ Une supermatrice contient des variables commutantes et anticommutantes :

$$M = \begin{array}{c|cc} & b & f \\ \hline b & A & B \\ f & C & D \end{array}$$ et sa supertrace est $\mathrm{str}\, M \equiv \underbrace{\mathrm{tr}\, A}_{\text{boson}} - \underbrace{\mathrm{tr}\, D}_{\text{fermion}}$

DEF Le superdéterminant est définit par

$$\mathrm{sdet} = \exp\left[\mathrm{str}\{\ln M\}\right]$$

où $\ln M = \ln(I + M - I) = \sum_{k\geq 1} \frac{(M-1)^k}{k}(-1)^{k+1}$

Si D est inversible, alors on peut écrire $M = \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}$,
et donc $\det M = \frac{1}{\det D}\det(A - BD^{-1}C)$

→ Pour $M = I + \epsilon$, on a $\mathrm{sdet}\, M = 1 + \mathrm{str}\,\epsilon$

→ Rappel: $\int \mathcal{D}\phi\ \delta V^A/\delta\phi^A = 0$. Ceci correspond à l'invariance de la mesure sous translation: $\phi^A \mapsto \phi^A + \varepsilon^A$;

$$\int \mathcal{D}\phi\ F[\phi] \overset{!}{=} \int \mathcal{D}\phi\ F[\phi + \varepsilon]$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \left(F[\phi] + \frac{\delta F}{\delta\phi^A}\varepsilon^A\right) \Rightarrow \int \mathcal{D}\phi\ \frac{\delta(F\varepsilon^A)}{\delta\phi^A} = 0$$

→ Démontrons à présent le théorème:

On varie $\psi \mapsto \psi + \mu$. Alors Z_ψ varie selon

$$\delta Z_\psi = \int \mathcal{D}\phi\ \frac{\delta^R S}{\delta\phi^*_A} \exp\frac{i}{\hbar}S_\psi \cdot \frac{\delta\mu}{\delta\phi^A}$$

$$= \underbrace{\int \mathcal{D}\phi\ \frac{\delta^L}{\delta\phi^A}\left(\frac{\delta^R S}{\delta\phi^*_A}\exp\frac{i}{\hbar}S_\psi \cdot \mu\right)}_{=0} - \int \mathcal{D}\phi\ \frac{\delta^L\delta^R S}{\delta\phi^A\delta\phi^*_A}\exp\frac{i}{\hbar}S_\psi\, \mu$$

$$- \frac{i}{\hbar}\int \mathcal{D}\phi\ \frac{\delta_R S}{\delta\phi^*_A}\underbrace{\frac{\delta_L S_\Psi}{\delta\phi^A}}_{\left(\frac{\delta_L S}{\delta\phi^A} + \frac{\delta^2\psi}{\delta\phi^A\delta\phi^B}\frac{\delta_L S}{\delta\phi^*_B}\right)}\exp\frac{i}{\hbar}S_\Psi\, \mu$$

$(S,S) = 0 \Rightarrow 0$ "

et $\frac{\delta_R S}{\delta\phi^*_A} = (-1)^{\epsilon_A + 1}\frac{\delta_L S}{\delta\phi^*_A} \Rightarrow \ = 0$ car $\Delta S = 0$

→ $\Delta S = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}\phi$ invariante par transfo BRST:

$$\delta\phi^A = (s\,\phi^A)\Big|_{\phi^* = \frac{\delta\psi}{\delta\phi}} \cdot \theta \qquad \epsilon_\theta = 1$$

Action fixée de jauge par Y-M :

→ Ψ doit avoir $\epsilon(\Psi) = 1$ et $gh(\Psi) = -1$. On considère
$$\Psi = i \int d^n x \; \bar{C}_a \left(\mathcal{F}^a + \frac{\alpha}{2} b^a \right)$$

où $\mathcal{F}^a(A, \partial A)$ telle que $\mathcal{F}^a = 0$ est une condition de jauge.
ex : $\mathcal{F}^a = \partial_\mu A^{a\mu}$ condition de jauge de Lorentz

Pour ce choix de Ψ, l'action fixée de jauge devient :
$$S_\Psi = \int d^n x \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a \underbrace{- i \partial^\mu \bar{C}_a D_\mu C^a}_{A^{*\mu}_a D_\mu C^a} + \underbrace{\left(\partial^\mu A^a_\mu + \frac{\alpha}{2} b^a \right) b_a}_{\bar{C}^*_a b^a} \right)$$

Ceci reproduit l'intégral de chemin de Y-M.

Resumé

→ On a considéré l'intégrale fonctionelle pour l'amplitude vide-vide Z_Ψ dans le cas où $\Delta S = (-1)^{\epsilon_A} \frac{\delta_L}{\delta \phi^A} \frac{\delta_L}{\delta \phi^*_A} S = 0$ avec $\begin{cases} gh \, \Delta = 1, & \Delta^2 = 0 \\ \epsilon(\Delta) = 1 \end{cases}$

et avec $(\phi^A) = (\phi^i, C^\alpha ; \bar{C}^\alpha, b^\alpha)$. Alors
$$Z_\Psi = \int \mathcal{D}\phi \; \exp \frac{i}{\hbar} S_\Psi \quad \text{avec} \quad S_\Psi[\phi^A] = S\left[\phi^A, \phi^*_A = \frac{\delta \Psi}{\delta \phi^A}\right] \quad \text{où} \quad \begin{matrix} gh \, \Psi = -1 \\ \epsilon \Psi = 1 \end{matrix}$$

tel que S_Ψ n'ai pas d'invariance de jauge ("jauge unitaire")

→ Z_Ψ est indépendant de Ψ

2.6 Equation maitresse quantique

→ On regarde le cas où $\Delta S \neq 0$. Lorsque $\Delta S = 0$, une transformation BRST preserve la mesure. Quand ce n'est pas le cas, il faut corriger Z_Ψ afin de rétablir l'invariance.
On remplace $\mathcal{D}\phi \mapsto \mathcal{D}\phi\,(\mu_1 + \hbar\mu_2 + \hbar^2\mu_3 + \dots)$ afin de rétablir l'invariance BRST. On écrit $\exp(\log \mu_1) = \exp(i/\hbar\,(i\hbar \log \mu_1))$

$$\mathcal{D}\phi \exp \frac{i}{\hbar}\left(S_\Psi + \hbar M_1 + \hbar^2 M_2 + \dots\right)$$

→ Par quoi faut-il remplacer $S[\phi, \phi^*] \mapsto W[\phi, \phi^*] = S + \hbar M_1 + \hbar^2 M_2 + \dots$
tel que $Z_\Psi = \int \mathcal{D}\phi \exp \frac{i}{\hbar} W_\Psi$ où $W_\Psi \equiv W[\phi, \phi^* = \delta\Psi/\delta\phi]$
↳ ne dépend pas du choix de Ψ.

DEF L'équation maitresse quantique est

$$(W,W) - 2i\hbar \Delta W = 0$$

PROP L'eq. maitresse quantique est équivalente à

$$\Delta\left(\exp \frac{i}{\hbar} W\right) = 0$$

PROP Quelques propriétés de Δ :

① $\Delta(\alpha\beta) = (\Delta\alpha)\beta + (-1)^{\varepsilon_\alpha}\alpha(\Delta\beta) + (-1)^{\varepsilon_\alpha}(\alpha, \beta)$

② $\Delta(\alpha, \beta) = (\Delta\alpha, \beta) - (-1)^{\varepsilon_\alpha}(\alpha, \Delta\beta)$ antidérivation sur l'anticrochet

→ En effet, on considère $f(t) = \left(\exp \frac{-i}{\hbar} tW\right)\Delta\left(\exp \frac{i}{\hbar} tW\right)$ et on cherche $f(1)$.

$$\frac{df}{dt} = \frac{-i}{\hbar} W \exp\left(\frac{-i}{\hbar} tW\right)\Delta\left(\exp \frac{i}{\hbar} tW\right) + \exp\left(\frac{-i}{\hbar} tW\right)\Delta\left(\frac{i}{\hbar} W \exp\left(\frac{i}{\hbar} tW\right)\right)$$

$$= \frac{-i}{\hbar} W \exp\left(\frac{-i}{\hbar} tW\right)\Delta\left(\exp \frac{i}{\hbar} tW\right) + \frac{i}{\hbar}\exp\left(\frac{-i}{\hbar} tW\right)(\Delta W)\exp\left(\frac{i}{\hbar} tW\right)$$

$(W, e^A) = (W, A)e^A$

$$+ \frac{i}{\hbar}\exp\left(\frac{-i}{\hbar} tW\right) W \Delta\left(\exp \frac{i}{\hbar} tW\right) + \frac{i}{\hbar}\exp\left(\frac{-i}{\hbar} tW\right)\left(W, \exp \frac{i}{\hbar} tW\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\Delta W + \frac{i}{\hbar}\exp\left(\frac{-i}{\hbar} tW\right)\left(W, \frac{i}{\hbar} tW\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar} tW\right) = \frac{i}{\hbar}\left(\Delta W + \frac{i}{\hbar} t (W,W)\right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{i}{\hbar}\left(\Delta W t + \frac{i}{\hbar}\frac{t^2}{2}(W,W)\right) + c \Rightarrow f(1) = \frac{i}{\hbar}\left(\Delta W + \frac{i}{2\hbar}(W,W)\right)$$

Ainsi, $\frac{i}{\hbar}\left(\Delta W + \frac{i}{2\hbar}(W,W)\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}W\right) \cdot \Delta\left(\exp\left(\frac{i}{\hbar}W\right)\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\left((W,W) - 2i\hbar\,\Delta W\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}W\right) \cdot \Delta\left(\exp\left(\frac{i}{\hbar}W\right)\right)$

$\Leftrightarrow \left((W,W) - 2i\hbar\,\Delta W = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\left(\exp\left(\frac{i}{\hbar}W\right)\right) = 0 \right)$

→ La forme $(W,W) - 2i\hbar\,\Delta W = 0$ fait un contact avec l'éq. maîtresse classique.
La forme $\Delta e^{\frac{i}{\hbar}W} = 0$ est utile pour montrer que Z_Ψ ne dépend pas du choix de Ψ.

PROP $Z_\Psi \equiv \int \mathcal{D}\phi \; U_\Psi$ où $U_\Psi \equiv \exp \frac{i}{\hbar} W_\Psi$ avec $W_\Psi = W[\phi, \phi^* = \delta\Psi/\delta\phi]$ est indépendant de Ψ.

→ En effet, on a $\Delta U = 0$, et on remplace $\Psi \mapsto \Psi + \mu$. Alors $\delta\Psi := 0$ et $\delta\phi^*_A = \frac{\delta\mu}{\delta\phi^A}$. De plus,

$$\delta Z_\Psi = \int \mathcal{D}\phi \; \frac{\delta_L U}{\delta\phi^*_A} \cdot \frac{\delta_L \mu}{\delta\phi^A} = \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \; \frac{\delta^L}{\delta\phi^A}\left(\mu \frac{\delta^L U}{\delta\phi^*_A}\right)}_{\text{invariance par translation} \to 0} - (-1)^{\epsilon_A} \mu \cancel{\frac{\delta^L}{\delta\phi^A} \frac{\delta^L U}{\delta\phi^*_A}}^{\,0} = 0$$

→ Analysons l'éq. maîtresse quantique ordre par ordre en $\hbar$:
$(S + \hbar M_1 + \hbar^2 M_2 + \ldots, S + \hbar M_1 + \hbar^2 M_2 + \ldots) - 2i\hbar\,\Delta(S + \hbar M_1 + \hbar^2 M_2 + \ldots) = 0$

→ $O(\hbar^0)$: $(S,S) = 0$

→ $O(\hbar)$: $2(S, M_1) - 2i\,\Delta S = 0$ existe-t-il un M_1 qui satisfait cette eq. ?

$\Leftrightarrow \; s M_1 = i\,\Delta S$

Or, $s^2 = 0$. Il faut alors que ΔS soit exact ($\Leftarrow$ fermé)

↳ Vérifions d'abord que $s\Delta S = (S, \Delta S) = 0$:
on sait que $0 = \Delta(S,S) = (\Delta S, S) - (S, \Delta S) = 2(\Delta S, S)$ ok !

↳ Il faut en plus une cohomologie triviale : $H^1(s) = 0$; ça dépend des théories ! Même si $H^1(s) \neq 0$, il se peut que ΔS soit une classe de cohomologie triviale de $H^1(s)$

↳ Il y a une ambiguïté : si M_1 est solution, alors $M_1 \mapsto M_1 + N_1$ tq $sN_1 = 0$ est aussi solution.
↳ transformation canonique, contrôlée par $H^0(s)$

→ Les obstructions aux solutions de l'éq. maîtresse quantique à l'ordre $\hbar$ sont décrites par $H^1(s)$ et l'ambiguïté dans la solution est décrite par $H^0(s)$.
A l'ordre $\hbar^2$, c'est aussi $H^1(s)$ et $H^0(s)$ qui entrent en jeux.

2.7 Déformations cohérentes des théories de jauge

→ On suppose une théorie de jauge classique et cohérente $\overset{(0)}{S}$.
On peut lui associer une solution classique de l'équation maîtresse.
$$(\overset{(0)}{S}, \overset{(0)}{S}) = 0$$
Peut-on introduire des interactions en conservant le nombre de symétrie de jauge ?

→ On cherche alors $\overset{(0)}{S} \to S = \overset{(0)}{S} + g\overset{(1)}{S} + g^2\overset{(2)}{S} + \dots$ tel que $(S,S)=0$
On retrouve alors un formalisme similaire au précédent.
Les obstructions sont mesurées par $H^1(\overset{(0)}{s})$ et les ambiguïtés par $H^0(\overset{(0)}{s})$.

2.8 Valeurs moyennes d'observables

→ Soit une observable $A_0[\phi^i]$. On cherche $\langle A_0[\phi^i]\rangle$.

On associe à $A_0[\phi^i]$, $A[\phi^A, \phi^*_A]$ tq $(S,A)=0$. On avait alors une ambiguïté caractérisée par $H^0(s)$. (partie classique)
Ensuite, on corrige A par des termes $\propto \hbar$:
$$A_0 \longrightarrow A \longrightarrow \alpha = A + \hbar\alpha_1 + \hbar^2\alpha_2 + \dots \text{ tel que}$$
DEF $$\sigma\alpha \equiv (W,\alpha) - i\hbar\Delta\alpha = 0 \qquad \text{(BRST quantique)}$$
$$\Leftrightarrow \Delta\left(\alpha \exp \tfrac{i}{\hbar} W\right) = 0$$
Cette eq. garantit que $\underbrace{\int D\phi\, \alpha_\psi \exp \tfrac{i}{\hbar} W_\psi}_{\langle A_0\rangle_\psi}$ ne dépend pas de ψ

PROP Si α est trivial ($\alpha = \sigma\beta$), alors $\alpha \exp\tfrac{i}{\hbar}W = \Delta\left(\beta \exp \tfrac{i}{\hbar} W\right)$
C'est à dire $\langle \sigma\beta\rangle_\psi = 0$

↳ Si $\alpha = \sigma\beta$, alors $A = sB$ où $\begin{cases} \alpha = A + \hbar \dots \\ \beta = B + \hbar\dots \end{cases}$

2.9 Cohomologie locale

→ On considère des intégrales sur l'espace-temps de fonction des champs et de leur dérivée jusqu'à un ordre fini.

$$I_0 = \int d^n x \; \mathcal{L}_0 (\phi^i, \partial_\mu \phi^i, \dots, \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \phi^i)$$

→ On considère des p-forme locales

$$\omega^{(p)} = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} (\phi^i, \partial_\mu \phi^i, \dots, \partial_{\mu_1 \dots \mu_k} \phi^i) \, dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$$

On peut voir l'action comme $I_0 = \int \omega^{(n)}$. De manière générale, on considère $a = \int \omega^{(n)}$. Quel est la cohomologie BRST pour de tel objet ?

$$s a = 0 \quad \text{où on identifie} \quad a \sim a + s b \quad \text{où} \quad b = \int \chi^{(n)}$$

$$\Leftrightarrow \int s \omega^{(n)} = 0 \Leftrightarrow s \omega^{(n)} = d \psi^{(n-1)}$$ un fois intégré, donne une intégrale de surface.

et $s b = \int s \chi^{(n)}$, on peut rajouter $s \chi^{(n)} + d \alpha^{(n-1)}$

DEF La cohomologie de $s|d$ $H^{g,n}(s|d)$ est définie par :

$$H^{g,n}(s|d) = \frac{\{ \omega^{(n)} / s \omega^{(n)} = d \psi^{(n-1)} \}}{\{ s \chi^{(n)} + d \alpha^{(n-1)} \}} \quad \text{où} \quad \omega^{(n)} \sim \omega^{(n)} + s \chi^{(n)} + d \alpha^{(n-1)}$$

→ On a la condition de jauge $s a + d b = 0$

$$\text{où} \quad a \sim a + \underbrace{s c + d e}_{\text{terme exact}}$$

→ On s'intéresse alors à $H^{0,n}(s|d)$ et $H^{1,n}(s,d)$.

⊙ $H^0(s|d)$ et $H^1(s|d)$ pour les théories de Y-M :

secteur min | secteur non minimal

→ On introduit A^a_μ C^a | $\bar{C}_a$ b_a ghost : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{*\mu}$ C^*_a | $\bar{C}^{*a}$ b^{*a}

antich. d'antifantome

Le secteur minimal forme des paires contractiles qui ne contribuent pas à la cohomologie.

On avait que $\begin{cases} s\,\bar{C}_a = b_a \\ s\, b^{*a} = \bar{C}^{*a} \end{cases}$ et introduit $t\, b_a = \bar{C}_a$, $t\,\bar{C}^{*a} = b^{*a}$

de sorte que $st + ts = N$ est une derivation.

Rappel : soit P_k un polynome en $\{\bar{C}_a, b_a, \bar{C}^{*a}, b^{*a}\}$, alors si $N P_k = k P_k$, alors $P_k = (st+ts)(1/k\; P_k)$, donc si $sP_k = 0$, alors $P_k = s(tP_k/k) \Rightarrow$ pas de cohomologie associée

→ Pour la cohomologie modulo d, on étend l'action de s sur les derivée en le faisant commuter : $s\,\partial_\mu = \partial_\mu s$ et $t\,\partial_\mu = \partial_\mu t$

En multipliant par dx^μ, on a :

$dx^\mu s\,\partial_\mu = dx^\mu \partial_\mu s \Leftrightarrow -s\,\partial_\mu dx^\mu = \partial_\mu dx^\mu s \Leftrightarrow -sd = ds$

$\Leftrightarrow sd + ds = 0$. De même, $td + dt = 0$

Regardons degré par degré. On a encore $NP_k = kP_k$, mais cette fois on regarde modulo d : $\exists m_k$ t.q. $sP_k + dm_k = 0$.

Alors $P_k = (st+ts)(P_k/k)$

$= stP_k/k - tdm_k/k$

$= (1/k)(stP_k) + d(tm_k))$

Si P_k est tq $sP_k = d(\dots)$, alors $P_k = s(\dots) + d(\dots)$ est trivial

↳ Le secteur non minimal ne contribue tjs pas à la cohomologie.

→ Pour décrire la cohomologie, on suppose que l'algebre de jauge est simple. On avait $sA^a_\mu = D_\mu C^a$ $sC^a = \frac{1}{2} f^a{}_{bc} C^b C^c$

→ Degré 0 : $H^0(s|d)$. On cherche des solutions de $sa + db = 0$ en degré de fantôme 0.

Une manière de faire est de considérer des courbures contractée avec des tenseurs invariants.

Solution du 1e type : $I(F^a_{\mu\nu}, D_\rho F^a_{\mu\nu}, D_\rho D_\sigma F^a_{\mu\nu}, \dots)$
ex : $F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b}\delta_{ab}$ ou $\mathrm{Tr}[F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}]$ (resp. Y-M et CS)

→ L'autre type de solution s'obtient en dimensions impaires :
⊙ Terme de Chern-Simons :

$A^a_\mu \to A \equiv A^a_\mu dx^\mu T_a$ 1-forme

$F^a_{\mu\nu} \to F \equiv \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu T_a$ 2-forme

↳ On regarde l'algèbre engendrée par A et F en dimension 3.
On se place d'abords en dim 4 : $\mathrm{tr}\, F\wedge F$ (on a $d(\mathrm{tr}\, F\wedge F) = 0$)
Puisque $\mathrm{tr} F^2$ est fermé, on peut écrire $\mathrm{tr}\, F\wedge F = d\omega^{(0,3)}$
où $\omega^{(0,3)}$ est une 3-forme avec $gh(\omega^{(0,3)}) = 0$.
Or, $sd\omega^{(0,3)} = 0 \Rightarrow d(s\omega^{(0,3)}) = 0 \Rightarrow s\omega^{(0,3)} + d\omega^{(1,2)} = 0$. Ainsi, on a construit une solution de $H^{(0,3)}(s|d)$

↳ En dimension 5, on part de la dimension 6 : $\mathrm{tr}(F\wedge F\wedge F)$

Ces solutions sont non triviales dans le sens qu'on ne peut pas se débarasser du terme de bords. Ce sont les solutions du 2e type.

→ Degré 1 : $H^1(s|d)$
Il n'y a que des solutions de 2e type.
Ex : dimension 4. Il faut se placer alors en dim = 4+2. On considère $\mathrm{tr} F^3$. On a $d\, \mathrm{tr} F^3 = 0$. On a besoin d'un tenseur invariant symétrique d_{abc} pour pouvoir multiplier $d_{abc} F^a F^b F^c$. Alors, $\mathrm{tr} F^3 = d\omega^{(0,5)}$ et
$s\omega^{(0,5)} + d\omega^{(1,4)} = 0$, et $s\omega^{(1,4)} + d\omega^{(2,3)} = 0$

DEF $H^1(s|d)$ est la cohomologie des anomalies

→ Les groupes dans lesquels $d_{abc} = 0$ (pas de tenseur invariant à 3 indices, symétriques) sont dits libre d'anomalie. Il n'y a alors pas de solution de $H^1(s|d)$.

⊙ Renormalisation

→ On considère un théorie de type Y-M incluant les invariants :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{a} F_{a}^{\mu\nu} + \sum \alpha_i I_i \quad \text{où } [\alpha^i] = \varepsilon^{\Delta i}, \; \Delta_i \leq 0$$

La partie divergente à absorber est contrainte par $\Delta D = \Delta \int a = 0$
$\Leftrightarrow \Delta a + db = 0$ en degré de fantôme $gh(\mathcal{L}) = 0$.
Alors on a montré que $\int a = \sum_i d_i \int I_i + (S, M)$

Or, $\sum_i d_i \int I_i$ peut être absorbée par les constantes de couplage, et (S, M) par une redéfinition des champs.